

-e

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

1. mlPDE018.tex

Määritä sivuiltaan eristetyin sauvaan $L = 10$ lämpötila $t = 2$ sekunnin kuluttua alkuhetkestä käyttämällä eksplisiittistä menetelmää numeeriseen approksimointiin. Valitse $h = 1$ ja $k = 0.5$. Alkulämpötila: $f(x) = x - 0.1x^2$ ja sauvaan päät pidetään "jäissä". Tehtävä on siis:

$$u_t = u_{xx} \text{ (Olkoon lämpöyhtälön vakio = 1.)}$$

$$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \text{ (Reunaehdot)}$$

$$u(x, 0) = f(x) \text{ (Alkuehto).}$$

Piirrä alkulämpötilafunktion $f(x)$ ja ratkaisufunktiota $u(x, 2)$ approksimoivan lämpötilamurtoviivan kuvaaja.

Vihje:

2. mlPDE020.tex

Neliöalueessa diskretoidun Laplacen yhtälön matriisi on muotoa:

$$A = \begin{bmatrix} B & I & O & \dots & O \\ I & B & I & O & \dots \\ O & \ddots & \ddots & \ddots & O \\ \vdots & & & & \\ O & \dots & I & B & I \\ O & \dots & \dots & I & B \end{bmatrix}, \text{ missä } B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 1 & -4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

ja I on yksikkömatriisi sekä O nollamatriisi.

Jos solmuja on reunat mukaan lukien $n \times n$ kpl., niin sisäsolmuja on $(n-2)^2$ kpl. Tällöin B, I, O ovat $(n-2) \times (n-2)$ ja A on $(n-2)^2 \times (n-2)^2$ matriisi. A koostuu siis kolmesta lohkonauhasta, diagonaalilohkoina B ja ylä- ja alanauhahlohkoina I .

Tällaisen matriisin muodostamiseen on monta tapaa. Kaikkein helpoin on valmiiksi ohjelmoitu MATLAB-funktio `delsq`. Koska matriisit ovat yleensä suuria, on syytä käsitellä niitä *harvoina* (engl. *sparse*), ts. nollia ei talleteta, ainoastaan nollassa poikkeavat indekseineen. Niinpä `delsq` rakentaa matriisista automaattisesti harvan. Jos haluat katsoa sitä tai sen osaa täytenä, käytä komentoa `full`. Kokeile:

```
help delsq
help numgrid
G=numgrid('S',10) % 'S' viittaa alueeseen ''Square''. Muitakin
A=delsq(G)         % on Matlabin numgrid-repertuaarissa.
full(A)
ans(1:10,1:10)
```

(Yhtä helppoa nelioalueen tapauksessa on käyttää omatekoista `lapm`-funktiota `matlab`-hakemistossa.)

Lopussa muita tapoja:

Kokeile näitä komentoja muutellen sopivasti parametreja. Suorita myös komento `help sparfun`, saadaksesi katsauksen tärkeään osaan `MATLAB`:ia: harvojen matriisien käsittely-funktioihin.

Ratkaise tehtävä AV 3 käyttäen 50×50 -hilaa reunat mukaan lukien, siis $48^2 \times 48^2$ -matriisia A . Tulosvektori kannattaa muotoilla 48×48 -matriisiksi komennolla `U=reshape(u,48,48)`, jolloin sen voi heti visualisoida komennolla `surf(U)`. Teepä se.

Esitys taululla: Kerro kokeiluistasi ja havainnoista, mitä opit harvoista matriiseista ja miten lopun suorit ja mitä tunnelmia kuva herätti. (Jos joku kohta, kuten kuva ei onnistunut, voit ihmetellä ääneen, miksi.)

Vihje: