Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 4 (viikko 7 , 13 – 15.2.2002)

1. välikokeen alue sisältää harjoitukset 1–4 sekä muutaman kertaustehtävän harjoituksissa 5. Luentoalue katkeaa viikolla 7 tarkemmin ilmoitettavaan luentoon.

Hiihtolomaviikolla (8) ei pidetä luentoja, mutta harjoitukset pidetään. Viikko 9 puolestaan on välikoeviikko, jonka kunniaksi on vapaata harjoituksista.

Alkuviikko (AV)

1. Mitkä ovat seuraavien funktioiden luonnolliset määrittelyjoukot:
   a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, b) $f(x,y) = \ln(1+xy)$ c) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$.
   Piirrä (käsin) tasoon kunkin määrittelyjoukon kuva. Mitä topologisia ominaisuuksia joukoilla on? (*avoin, suljettu, rajoitettu, yhtenäinen, joukon reuna*, jne.)
2. Muodosta edellisen tehtävän funktioiden korkeuskäyrien (tasa-arvokäyrien) yhtälöt. Muodosta myös pystyleikkauskäyrät tasojen $x = 1$ ja $y = 1$ kanssa kussakin tapauksessa. Hahmottele (edelleen käsin) kuvia. (Saat toki kokeilla Maplea, mutta käsin hahmottelutaito on myös välttämätön.)
3. Onko seuraavilla funktioilla raja-arvo, kun $(x,y) \to (0,0)$:
   $$\text{a)}\ \frac{x}{|x|+|y|} \qquad \text{b)}\ \frac{x^2}{|x|+|y|}$$
4. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
   $$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x^2 < y < 2x^2, \\ 0, & \textit{muulloin.} \end{cases}$$
   Osoita, että funktiolla on sama raja-arvo origossa lähestyttäessä mitä tahansa suoraa pitkin, mutta siitä huolimatta varsinaista raja-arvoa ei ole olemassa. Missä pisteissä funktio on jatkuva ja missä taas ei?

   Ohje: Kulje erityisesti O:sta alkavaa nousevaa sädettä (kulmakerroin posit.) 1. neljänneksessä kulkien sitä alaspäin kohti origoa. Mitä tapahtuu lopulta, kun ollaan riittävän lähellä O:a?
5. (a) Muodosta funktion $\ln(1+e^{x^2y^3z})$ 1. kertaluvun osittaisderivaatat kaikkien muuttujien suhteen.
   (b) Osoita, että funktio $\arctan\frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$
   (Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)
6. Oletetaan, että funktioilla $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ on jatkuvat toiset osittaisderivaatat ja ne toteuttavat ns. *Cauchy-Riemannin* yhtälöt:
   $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$
   Osoita, että u ja v ovat harmonisia.

Loppuviikko (LV)

1. Tee joitakin AV-tehtäviin 1–4 liittyviä visualisointeja. Katso myös lopussa olevaa Maple-ohjetta ja `..L/pintoja.mws`-työarkkia malliksi. Tehtävä on vapaamuotoinen, suorituksen suhteen riittää parin funktion tarkastelu mielellään aika monipuolisesti. (Kenties innostut tekemään enemmänkin ihan vaan asian harrastuksesta.)
2. Olkoon $f(x,y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että ne ovat samat.
   Voit antaa Maplen laskea.
3. Laske yhdistetyn funktion derivoimissääntöä (eli ketjusääntöä, ”chain rule”) käyttäen $\frac{\partial w}{\partial s}$ ja $\frac{\partial w}{\partial t}$, kun
   (a) $w = x\ln(x^2+y^2)$, $x = s+t, y = s-t$,
   (b) $w = e^{x+2y}\sin(2x-y)$, $x = s^2+t^2$, $y = 2s^2-t^2$
   Tee käsin ja tarkista Maplella.

4. Kolmionmuotoisen maa-alan kahden sivun mitatut pituudet ovat 224 m ja 158 m ja niiden välinen kulma $64°$. Pituusmittauksen virheraja on 0.4 m ja kulman $2°$. Mikä on pinta-alan likimääräinen suhteellinen maksimivirhe.

   Vast: n. 2 %

5. Osittaisderivoituvan funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gradientti* ∇f määritellään näin $\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\mathbf{i} + f_y(x,y)\mathbf{j}$.

   Olkoon $f(x,y) = |xy|$.
   (a) Piirrä tasa-arvokäyrät(korkeuskäyrät) $f(x,y) = k, k = 1,2,3.$
   (b) Piirrä f:n gradienttivektoreita $\nabla f(x,y)$ tasa-arvokäyrien pisteisiin. Kun käytät samaa skaalaa akseleilla (`scaling=constrained`), pitäisi kuvasta näkyä, miten gradienttivektorin ja korkeuskäyrän suunnat suhtautuvat toisiinsa.

6. Työarkilla `../L/pintoja.mws` kohdassa "toinen esimerkki"tarkastellaan funktiota $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Sekä plot3d- että contourplot-kuvat ovat lievästi sanoen harhaisia. (Toki erilaisilla optioilla voi plot3d-kuvaa olennaisesti parantaa.) Selvitä, minkälainen kuvaaja todellisuudessa on. Tarvitset taas sekä Maplea että kynää ja paperia. Piirtele myös pystyleikkauksia, oikeita korkeuskäyriä ym.

Maple-ohjeita

Usein pintapiirrosta voidaan täsmentää ja tarkentaa ja ymmärtää paremmin, kun piirretään sopivia avaruuskäyriä pinnalle `spacecurve`:lla.

Alla on esimerkki, jossa piirretään napasädettä pitkin kulkevan pystytason ja annetun pinnan leikkauskäyrä sekä käyrän projektio xy-tasossa. Varsin käyttökelpoinen tapa monessa yhteydessä. Tätä voi modifioida tarpeen mukaan.

```
> with(plots):
> f:=(x,y)->4-x^2-y^2;
> x:=r*cos(Theta):y:=r*sin(Theta): Theta:=Pi/4:
> pystyleikkaus:=spacecurve({[x,y,f(x,y)],[x,y,0]},r=0..2,thickness=3,
color=blue,axes=BOX)
> x:='x':y:='y':  # On hyvä muistaa vapauttaa.
> pinta:=plot3d(...):   # Muista tässä tavassa lopettaa kaksoispisteeseen.
> display([pinta,pystyleikkaus],style=patchcontour);
> display(pystyleikkaus);  # Katsotaan pelkkää leikkauskäyrää.
```