Osder, Laplacen DY, harmoniset fkt. (Lisänä "yhtälöiden muokkausta")

a) Osoita, että $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ toteuttaa Laplacen yhtälön.

> $LapDy := diff(u(x, y), x, x) + diff(u(x, y), y, y) = 0$

$$LapDy := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = 0 \qquad (1.1)$$

> $u := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ # *Yksinkertaista käsitellä lausekkeena.*

$$u := \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1.2)$$

> $subs(u(x, y) = u, LapDy);$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \qquad (1.3)$$

> $eval(\%);$

$$\frac{2y}{x^3\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} - \frac{2y^3}{x^5\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2} - \frac{2y}{x^3\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2} = 0 \qquad (1.4)$$

```
> simplify(%);
```

$$0 = 0 \qquad (1.5)$$

Yhdistelmän subs, eval sijasta voidaan komentaa pelkkä eval. Mutta argumentit vastakkaisessa järjestyksessä kuin subs-komennossa.
Ajatus: eval(lauseke, ehdot) # evaluoi lauseke näiden ehtojen vallitessa.

```
> eval(LapDy,u(x,y)=u);simplify(%);
```

$$\frac{2y}{x^3\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} - \frac{2y^3}{x^5\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2} - \frac{2y}{x^3\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2} = 0$$

$$0 = 0 \qquad (1.6)$$

(Joskus Maple päättää siirtyä "document moodista" "worksheet moodiin", mikä näkyy punaisina syötteinä. Tällöin päätetään puolipisteeseen (Maple kyllä huomauttaa.))

b)   **Oletetaan, että funktioilla u(x,y) ja v(x,y) on jatkuvat 2. osittaisderivaatat ja ne toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt**. (Näin on erityisesti, jos u ja v ovat analyyttisen funktion Re- ja Im-osat.)
Osoita, että u ja v ovat harmonisia.

> *restart* :

> $CR1 := \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} v(x, y);$

$$CR1 := \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \qquad (1.7)$$

> $CR2 := \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y);$

$$CR2 := \frac{\partial}{\partial y}\, u(x,y) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\, v(x,y)\right) \quad \textbf{(1.8)}$$

> $diff(CR1, x)$ *# diff sovellettuna yhtälöön operoi puolittain (uusissa versioissa)*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\, v(x,y) \quad \textbf{(1.9)}$$

>

> $diff(CR2, y)$ *# diff olettaa v(x,y):n riittävän säännölliseksi, jotta sekaderivaatat yhtyvät.*

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\, u(x,y) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\, v(x,y)\right) \quad \textbf{(1.10)}$$

> **(1.9)** + **(1.10)**; *# Myös yhteenlasku toimii puolittain.*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, u(x,y) = 0 \quad \textbf{(1.11)}$$

Alempana tutkitaan, miten yleisesti laskutoimitukset ja muut operaatiot toimivat puolittain. Osoittautuu, että tässä on puutteita. Siksi voitaneen suositella tinkimistä eleganssista ja pitäytymistä lhs-rhs-tyyliin (vrt. seuraava kohta:"Yhtälöiden muokkausta"). Toki toimiviksi tiedetyt voi hoitaa yllä olevalla eleganssilla. Hyvä puoli on, että toimimattomista tulee huutavat punaiset virheilmot.

c) Sekaderivaattojen yhtyminen.
Tällaisilla laskuilla voidaan vahvistaa uskoa yleiseen lauseeseen, joka kertoo sekaderivaattojen yhtymisestä tietyillä (varsin yleisillä) oletuksilla.

> $f := x^3 \cdot y^2 + x^4 \cdot \sin(y) + \cos(x \cdot y)$

$$f := x^3\, y^2 + x^4 \sin(y) + \cos(x\, y) \quad \textbf{(1.12)}$$

> $fxxy := diff(f, x, x, y)$

$$fxxy := 12\, x\, y + 12\, x^2 \cos(y) + \sin(x\, y)\, x\, y^2 - 2 \cos(x\, y)\, y \quad \textbf{(1.13)}$$

> $fxyx := diff(f, x, y, x)$

$$fxyx := 12\, x\, y + 12\, x^2 \cos(y) + \sin(x\, y)\, x\, y^2 - 2 \cos(x\, y)\, y \quad \textbf{(1.14)}$$

> $fyxx := diff(f, y, x, x)$

$$fyxx := 12\, x\, y + 12\, x^2 \cos(y) + \sin(x\, y)\, x\, y^2 - 2 \cos(x\, y)\, y \quad \textbf{(1.15)}$$

Yhtälöiden muokkausta

Edellisessä huomattiin, että yhtälöissä derivointi ja yhteenlasku toimivat puolittain.
Miten yleisesti vastaava pätee?

> *restart*

> $yht1 := a = b;\ yht2 := c = d;$

$$yht1 := a = b$$
$$yht2 := c = d \quad \textbf{(2.1)}$$

> $yht1 + yht2$

$$a + c = b + d \quad \textbf{(2.2)}$$

> $yht1 - yht2$

$$a - c = b - d \tag{2.3}$$

> $yht1 \cdot yht2$ # *Oho!*

```
Error, (in simpl/reloprod) invalid terms in product: (a = b)*(c = d)
```

>

> $lhs(yht1) \cdot lhs(yht2) = rhs(yht1) \cdot rhs(yht2)$ # *Ei kaunista, mutta toimii.*

$$a\,c = b\,d \tag{2.4}$$

Toki voidaan määritellä funktioksi:

> $kerroyht := (yht1, yht2) \rightarrow lhs(yht1) \cdot lhs(yht2) = rhs(yht1) \cdot rhs(yht2)$

$$kerroyht := (yht1, yht2) \rightarrow lhs(yht1)\; lhs(yht2) = rhs(yht1)\; rhs(yht2) \tag{2.5}$$

> $kerroyht(yht1, yht2)$ # *Nythän menee vaivattomasti.*

$$a\,c = b\,d \tag{2.6}$$

> $map(f, yht1)$ # *Hyvä*

$$f(a) = f(b) \tag{2.7}$$

> $map(f, yht1, x)$ # *Hyvä*

$$f(a, x) = f(b, x) \tag{2.8}$$

> $zip(f, yht1, yht2)$ # *Ei hyvä*

$$f(a = b, c = d) \tag{2.9}$$

>

Vastaavasti kuin kertomisessa, voidaan määritellä muiden operaatioiden suhteen.
Sanoisko, että semisimppeliä tai semivaivalloista, riippuen näkökumasta.